EX 25 :

Pour $x \in IR_+$

1) on pose : $U(x) = x - Ln(1+x)$

$U'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \geq 0$

U est croissante sur IR_+

$x \geq 0 \Rightarrow U(x) \geq U(0)$

$\Rightarrow U(x) \geq 0$

$\Rightarrow x - Ln(1+x) \geq 0$

$\Rightarrow \boxed{Ln(1+x) \leq x}(1)$

* soit pour $x \geq 0$

$V(x) = Ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right)$

$V'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x$

$V(x) = \frac{x^2}{1+x} \geq 0$

V est croissante sur IR_+

$x \geq 0 \Rightarrow V(x) \geq V(0)$

$\Rightarrow Ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right) \geq 0$

$\Rightarrow \boxed{x - \frac{x^2}{2} \leq Ln(1+x)}(2)$

$(1)+(2) \Rightarrow x - \frac{x^2}{2} \leq Ln(1+x) \leq x$

2)

a) $w_p = p$ est une suite arithmétique de raison $r = 1$

$\sum_{p=1}^{n} p = \sum_{n=1}^{n} w_p = \frac{n}{2}(w_1 + w_n) = \frac{n(n+1)}{2}$

* démonstration par récurrence

_ pour $n = 1$

$\sum_{p=1}^{1} p^2 = 1 = \frac{1*2*3}{6}$ (vrai)

_ supposons que $\sum_{p=1}^{n} p^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Montrons que

$\sum_{p=1}^{n+1} p^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

$\sum_{p=1}^{n+1} p^2 = \sum_{p=1}^{n} p^2 + (n+1)^2$

$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$

$= \frac{(n+1)}{6}\left[n(2n+1) + 6(n+1)\right]$

$= \frac{n+1}{6}\left(2n^2 + 7n + 6\right)$

$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

Conclusion :

$\sum_{p=1}^{n} p^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall n \in IN^*$

b)

$Ln(P_n) = Ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) + Ln\left(1 + \frac{2}{n^2}\right) + \ldots$

$\ldots + Ln\left(1 + \frac{n}{n^2}\right)$

$Ln(P_n) = \sum_{p=1}^{n} Ln\left(1 + \frac{p}{n^2}\right)$

d'après 1)

$\frac{p}{n^2} - \frac{p^2}{2n^4} \leq Ln\left(1 + \frac{p}{n^2}\right) \leq \frac{p}{n^2}$

$\Rightarrow \sum_{p=1}^{n} \frac{p}{n^2} - \sum_{p=1}^{n} \frac{p}{4n^4} \leq Ln(P_n) \leq \sum_{p=1}^{n} \frac{p}{n^2}$

$\Rightarrow \frac{1}{n^2}\sum_{p=1}^{n} p - \frac{1}{4n^4}\sum_{p=1}^{n} p^2 \leq Ln(P_n) \leq \frac{1}{n^2}\sum_{p=1}^{n} p$

$\Rightarrow \frac{1}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) - \frac{1}{4n^4} \cdot \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$

$\leq Ln(P_n) \leq \frac{1}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$

$\Rightarrow \frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{24n^3} \leq Ln(P_n) \leq \frac{n+1}{2n}$

$\lim_{n \to +\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$

$\lim_{n \to +\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{24n^3} = 0$

$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} Ln(P_n) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} P_n = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

Qarray.tn-Aqra Blech-Qarray.tn